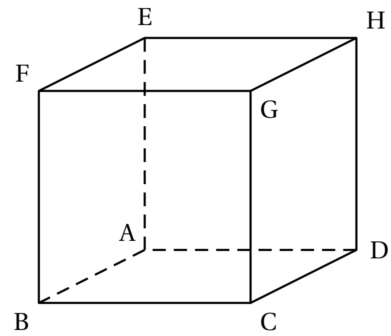
Exercice 2 — 5 points

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. On donne les coordonnées des points A, B, G, I et J :

   $\mathrm{A}\,(0\,,\,0\,,\,0)\,;\,\mathrm{B}\,(1\,,\,0\,,\,0)\,;\,\mathrm{G}\,(1\,,\,1\,,\,1)\,;\,\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right);\,\mathrm{J}\left(1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$

2. **a.** La droite (AJ) est l'ensemble des points $\mathrm{M}\left(x\,,\,y\,,\,z\right)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k.\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ avec $k \in \mathbf{R}$.

   $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\mathrm{M}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{M}-y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{M}-z_\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ sont $\begin{pmatrix} x_\mathrm{J}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{J}-y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{J}-z_\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   $$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k.\overrightarrow{\mathrm{AJ}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& k \\ y &=& \frac{k}{2} \\ z &=& \frac{k}{2} \end{array}\right.$$

   La droite (AJ) a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& k \\ y &=& \frac{k}{2} \\ z &=& \frac{k}{2} \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbf{R}$

   b. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbf{R})$ est la représentation paramétrique d'une droite passant par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)$, c'est-à-dire le point I, et ayant le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

   $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\mathrm{G}-x_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{G}-y_\mathrm{I} \\ z_\mathrm{G}-z_\mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Donc $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbf{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (IG).

   c. Les droites (AJ) et (IG) sont sécantes si et seulement si on peut trouver un couple de réels $(k\,,\,t)$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k &=& t \\ \frac{1}{2}k &=& t \end{array}\right.$. On résout ce système.

$$\left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k &=& t \\ \frac{1}{2}k &=& t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ k &=& 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2t &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ k &=& 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{3}{2}t &=& \frac{1}{2} \\ k &=& 2t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& \frac{1}{3} \\ k &=& \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Donc les droites (AJ) et (IG) sont sécantes. Pour $k=\frac{2}{3}$, on a $\left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}k &=& \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}k &=& \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Le point S d'intersection des droites (AJ) et (IG) a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$.

$\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 0\times 1+(-1)\times 0+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{AB}}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AG}} = 0\times 1+(-1)\times 1+1\times 1=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{AG}}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABG).

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABG), donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABG).

b. Le plan (ABG) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,,\,y\,,\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

$\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff x\times 0+y\times(-1)+z\times 1=0 \iff -y+z=0$

Le plan (ABG) a pour équation cartésienne : $-y+z=0$.

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ est : $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=-t \\ z=1+t \end{array}\right.\quad (t\in\mathbf{R})$.

S'il existe, le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABG), est solution du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2} \\ y &=& -t \\ z &=& 1+t \\ -y+z &=& 0 \end{array}\right.$

Il faut donc que : $-(-t)+(1+t)=0$ soit $2t+1=0$ ou encore $t=-\frac{1}{2}$.

Pour $t=-\frac{1}{2}$, on a $x=\frac{1}{2}$, $y=-t=\frac{1}{2}$ et $z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Donc la droite (d) coupe le plan (ABG) au point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

d. On calcule les distances LA, LB et LG.

- $\text{LA}^2 = (x_{\text{A}}-x_{\text{L}})^2+\left(y_{\text{A}}-y_{\text{L}}\right)^2+(z_{\text{A}}-z_{\text{L}})^2$
  $= \left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

  donc $\text{LA}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\text{LB}^2 = (x_{\text{B}}-x_{\text{L}})^2+\left(y_{\text{B}}-y_{\text{L}}\right)^2+(z_{\text{B}}-z_{\text{L}})^2$
  $= \left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

donc $\text{LB} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\text{LG}^2 = (x_\text{G} - x_\text{L})^2 + \left(y_\text{G} - y_\text{L}\right)^2 + (z_\text{G} - z_\text{L})^2$

  $= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

  donc $\text{LG} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc le point L est équidistant des points A, B et G.

4. $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}$ donc le triangle ABG est rectangle en B.

5. **a.** Points remarquables du triangle ABG.

- (AJ) et (IG) sont deux médianes du triangle ABG et elles se coupent en S ; donc le point S est le centre de gravité du triangle ABG.
- Le point L est équidistant des points A, B et G donc c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABG.
- Le triangle ABG est rectangle en B donc B est son orthocentre.

b. $\overrightarrow{\text{BS}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\\frac{1}{3}-0\\\frac{1}{3}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\\frac{1}{2}-0\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BS}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{BL}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{BS}}$ et $\overrightarrow{\text{BL}}$ sont colinéaires et donc les points B, S et L sont alignés.